(1) Si las siguientes operaciones:

$$(x;y) + (x^1, y^1) = (x + x^1, y + y^1)$$

$$\lambda(x;y) = (\lambda x, y)$$

Veremos primero neutro $e = (e_1; e_2)$

$$(x;y) + (e_1, e_2) = (x + e_1, y + e_2)$$

$$\text{Si } (x + e_1; y + e_2) = (x;y)$$

$$\rightarrow e = (e_1; e_2) = (0;0)$$

Veamos si cumple OPUESTO ADITIVO.

$$(x;y) + \underbrace{(-1)(x;y)}_{} = (0;0)$$

$$\underbrace{(x;y) + (-x;y)}_{}$$

$$\underbrace{(x-x; y+y)}_{}$$

$$(0;2y) \neq (0;0)$$

Por lo tanto con estas operaciones no es posible definir $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial.

(2) Con las operaciones siguientes

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$\lambda (x; y) = (\lambda x; 0)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ un e.v?

Primero veamos neutro aditivo.

$$\underbrace{(x; y) + (e_1; e_2)} = (x; y)$$

$$(x+e_1; y+e_2) = (x; y)$$

$$\rightarrow e = (e_1; e_2) = (0; 0)$$

Ahora OPUESTO ADITIVO.

$$(x; y) + \underbrace{(-1)(x; y)} = (e_1; e_2)$$

$$\underbrace{(x; y) + (-x; 0)} = (0; 0)$$

$$(0; y) \neq (0; 0)$$

Por lo tanto no cumple este axioma y las operaciones no definirán a $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial

Además que no cumple

$$\underbrace{1 . (x; y)} = (x; y)$$

$$(x; 0) \neq (x; y)$$

③ Sea $p \in P_n$ $(a_i \in \mathbb{R})$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Si $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

Veremos

i) $p(x) + g(x)$ también $\in P_n$ (cerradura)

ii) Si $\{p, q, r\} \in P_n \rightarrow (p+q)+r = p+(q+r)$
(asociativa de la suma)

iii) $p(x) + 0 = p(x)$

Si $0 = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0 \rightarrow 0 \in P_n$

iv) $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x - a_0$

$p(x) + (-p(x)) = 0$

v) $p(x) + g(x) = g(x) + p(x)$

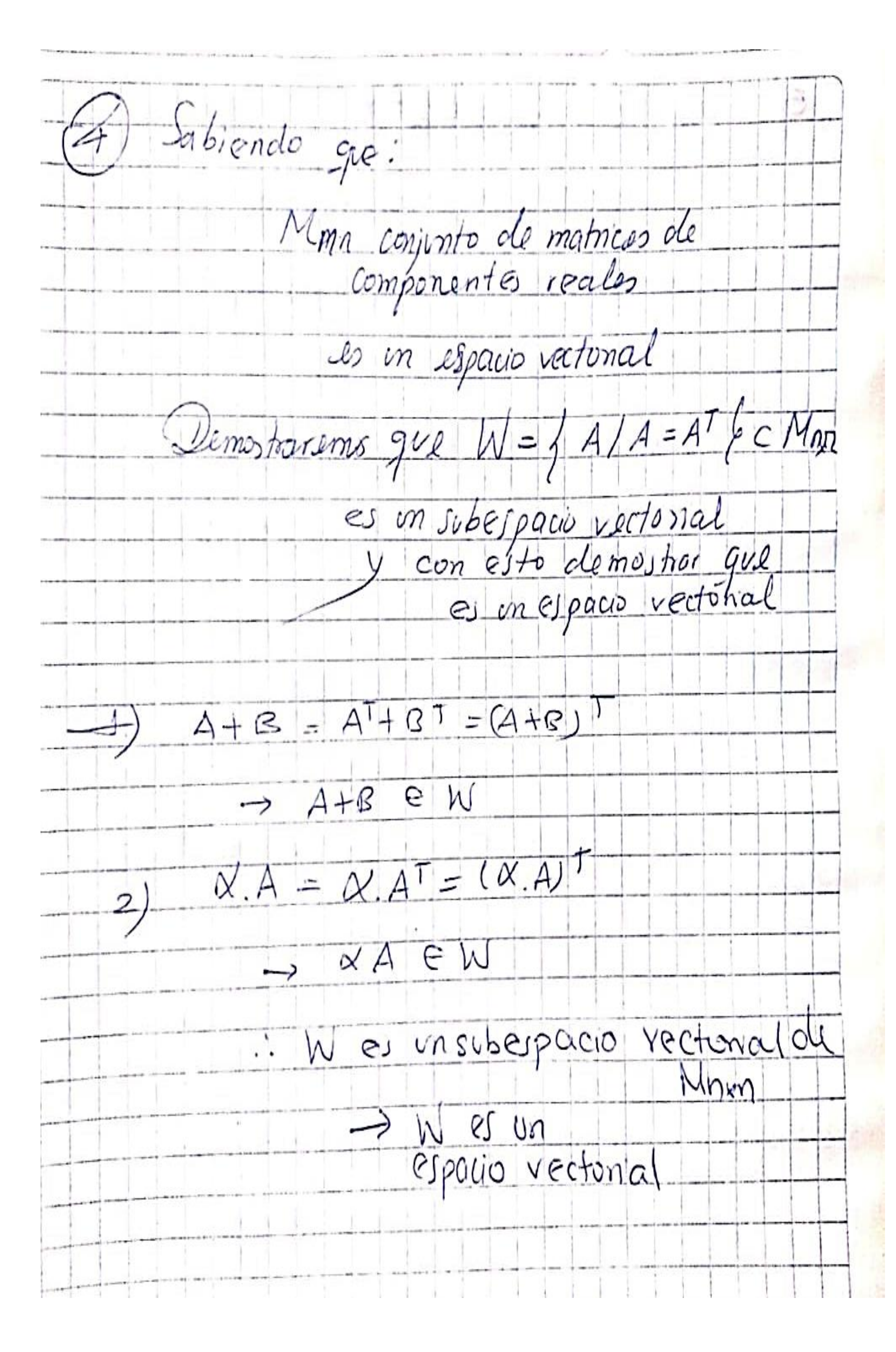
vi) $\alpha . p(x) \in P_n$ ya que $\alpha p(x)$ es de un grado igual a $p(x)$

vii) $\alpha(p+g) = \alpha p + \alpha g$

viii) $(\alpha + \beta) p = \alpha p + \beta p$

ix) $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta) p$

x) $1 . p = p$



(4) Sabiendo que:

M_{mn} conjunto de matrices de componentes reales

es un espacio vectorial

Demostraremos que $W = \{ A / A = A^T \} \subset M_{nxn}$

es un subespacio vectorial

y con esto demostrar que es un espacio vectorial

1) $A + B = A^T + B^T = (A+B)^T$

$\rightarrow A+B \in W$

2) $\alpha . A = \alpha . A^T = (\alpha . A)^T$

$\rightarrow \alpha A \in W$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de M_{nxn}

$\rightarrow$ W es un espacio vectorial

(5) Sea $V = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$(x;y) + (x';y') = (x+x'-1; y+y')$$

$$\lambda(x;y) = (\lambda x; 0)$$

¿Es V un espacio vectorial?

Si $(x;y) + (e_1; e_2) = (x; y)$

$$(x + e_1 - 1; y + e_2) = (x; y$$

$$e = (e_1; e_2) = (1; 0)$$

Si $(x;y) + (-1)(x;y) = (1;0)$

$$(x;y) + (-x;0)$$

$$(x - x - 1; y + 0)$$

$$(-1; y) \neq (1;0)$$

Por lo tanto no cumple con el axioma

y V no es un espacio vectorial

(5) Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+y', x'+y, z+z')$$

Si $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Vemos NEUTRO ADITIVO

$$(x,y,z) + \overbrace{(e_1; e_2; e_3)}^{e} = (x; y; z)$$

$$(x+e_2; e_1+y; z+e_3) = (x; y; z)$$

$$e_2 = 0; \ e_1 = 0; \ e_3 = 0$$

$$e = (0;0;0)$$

Veamos INVERSO ADITIVO.

$$(x,y,z) + (-1)(x;y,z) = (0;0;0)$$

$$(x;y;z) + (-x;-y;-z)$$

$$(x-y; -x+y; z-z)$$

$$(x-y; y-x; 0) = (0;0;0)$$

Solo se cumple para $x = y$

Para los demas valores $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$ no se cumple

$\rightarrow$ V no es un espacio vectorial

7) Determine cuales de los siguientes conjuntos W son subespacios vectoriales del espacio vectorial V:

I) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

Tenemos que los elementos de W son de la forma:

$$\begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sea $X, Y \in W$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ -y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha . X + Y = \alpha . x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha . x + y) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

II) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{ (t, 3t, 5t) \in \mathbb{R}^3 \}$

Tenemos que los elementos de W son de la forma:

$$\begin{bmatrix} t \\ 3t \\ 5t \end{bmatrix} = t . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sea $X, Y \in W$

$$X = \begin{vmatrix} x \\ 3x \\ 5x \end{vmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ 3y \\ 5y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha . X + Y = \alpha . x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (\alpha . x + y) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in W$$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

III) $V = M_3 \quad , \quad W = \{ A \in M_3 \mid \det(A) = 0 \}$

Sea $A, B \in W$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(A) = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad \det(B) = 0$$

$$\alpha . A + B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(\alpha . A + B) = \alpha a_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \alpha a_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + \alpha a_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$$

$\rightarrow \det(\alpha . A + B) \neq 0$

$\therefore$ W no es un subespacio vectorial de M_3

8) Diga si los siguientes conjuntos son L.I o L.D y cuales de ellos son una base.

a. $\{x; 2x-x^2; 6x-2x^2\}$ en P_2

$$a(x)+b(2x-x^2)+c(6x-2x^2) = 0+0x+0x^2$$
$$ax+2bx-bx^2+6cx-2cx^2 = 0+0x+0x^2$$
$$(a+2b+6c)x+(-b-2c)x^2 = 0+0x+0x^2$$

$$\left.\begin{array}{r} a+2b+6c=0 \\ -b-2c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=t \\ b=-2t \\ a=-2t \end{array}, \ t\in\mathbb{R}$$

$\exists$ infinitas soluciones

Sea $t=1 \rightarrow c=1, b=-2$ y $a=-2 \rightarrow 1(x)-2(2x-x^2)-2(6x-2x^2)=0$

∴ El conjunto es L.D. por lo tanto no es una base en P_2

b. $\{1-2x; 3x+x^2-x^3; 1+x^2+2x^3; 3+2x+3x^3\}$ en P_3

$$a(1-2x)+b(3x+x^2-x^3)+c(1+x^2+2x^3)+d(3+2x+3x^3) = 0+0x+0x^2+0x^3$$
$$a-2ax+3bx+bx^2-bx^3+c+cx^2+2cx^3+3d+2dx+3dx^3 = 0+0x+0x^2+0x^3$$
$$(a+c+3d)+(-2a+3b+2d)x+(b+c)x^2+(-b+2c+3d)x^3 = 0+0x+0x^2+0x^3$$

$$\left.\begin{array}{r} a+c+3d=0 \\ -2a+3b+2d=0 \\ b+c=0 \\ -b+2c+3d=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 17/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow a=0, b=0, c=0, d=0$$

∴ El conjunto es L.I. y como el # de elementos del conjunto es igual a $4 = \dim(P_3)$ entonces el conjunto es una base en P_3.

9) Dados los vectores $a=(1,2,3)$; $b=(1,1,1)$; $c=(1,0,5)$; $d=(1,1,3)$

a) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

Sea $S=\{(1,2,3);(1,1,1);(1,0,5);(1,1,3)\}$

$$m(1,2,3)+n(1,1,1)+p(1,0,5)+q(1,1,3)=0$$

$$(m,2m,3m)+(n,n,n)+(p,0,5p)+(q,q,3q)=0$$

$$(m+n+p+q,\ 2m+n+q,\ 3m+n+5p+3q)=0$$

$$\left.\begin{array}{r} m+n+p+q=0 \\ 2m+n+q=0 \\ 3m+n+5p+3q=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces tenemos:

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \begin{array}{l} m=t \\ n=t \\ p=t \\ q=-3t \end{array},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{Infinitas soluciones}$$

Sea $t=1 \to m=1, n=1, p=1, q=-3$

$$\to (1,2,3)+(1,1,1)+(1,0,5)-3(1,1,3)=0$$

$\therefore$ El conjunto S es L.D. por lo tanto los vectores no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Expresar el vector d como combinación lineal de a, b y c

$$(1,1,3) = x(1,2,3) + y(1,1,1) + z(1,0,5)$$

$$(1,1,3) = (x, 2x, 3x) + (y, y, y) + (z, 0, 5z)$$

$$(1,1,3) = (x+y+z, 2x+y, 3x+y+5z)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+y=1 \\ 3x+y+5z=3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

Entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 1/3 \\ y = 1/3 \\ x = 1/3 \end{array} \right.$$

Finalmente tenemos que:

$$(1,1,3) = \frac{1}{3}(1,2,3) + \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,0,5)$$

$\therefore$ Si es posible expresar el vector d como combinación lineal de a, b y c.

10) Si u, v y w son L.D. ¿Podemos asegurar que
a) u es combinación lineal de v y w?

Dado que u, v y w son L.D entonces existen constantes no todas igual a 0 tales que:

$$C_1 . u + C_2 . v + C_3 . w = 0$$

Sea $C_1 \neq 0$

$$\rightarrow u + \frac{C_2}{C_1} . v + \frac{C_3}{C_1} . w = 0$$

$$\rightarrow u = -\frac{C_2}{C_1} . v - \frac{C_3}{C_1} . w$$

∴ Si es posible expresar u como una combinación lineal de v y w.

b) Halle las coordenadas del vector $a = (4,3,7)$ respecto de la base $B = \{(2,1,0); (1,0,-2); (0,0,3)\}$

$$(4,3,7) = \alpha(2,1,0) + \beta(1,0,-2) + \theta(0,0,3)$$

$$(4,3,7) = (2\alpha, \alpha, 0) + (\beta, 0, -2\beta) + (0,0,3\theta)$$

$$(4,3,7) = (2\alpha + \beta, \alpha, -2\beta + 3\theta)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 3 \\ -2\beta + 3\theta = 7 \end{array}\right\} \alpha = 3,\ \beta = -2,\ \theta = 1$$

$$\rightarrow (4,3,7) = (3)(2,1,0) + (-2)(1,0,-2) + (1)(0,0,3)$$

∴ Las coordenadas de $(4,3,7)$ respecto de la base B son $3, -2, 1$

11) Dados los vectores $u=(2,-1,0)$ y $v=(3,2,1)$

a) ¿Son linealmente independientes?

$$a(2,-1,0)+b(3,2,1)=0$$
$$(2a,-a,0)+(3b,2b,b)=0$$
$$(2a+3b,-a+2b,b)=0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a+3b=0 \\ -a+2b=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \quad b=0,\ a=0$$

∴ Los vectores u y v son linealmente independientes.

b) ¿Pueden formar una base de $\mathbb{R}^3$ a partir de dichos vectores?

Tenemos que la base canonica en $\mathbb{R}^3$ es:

$$\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} \rightarrow \dim(\mathbb{R}^3)=3$$

∴ Concluimos que los vectores u y v no forman una base de $\mathbb{R}^3$ ya que la $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ es la cantidad de vectores que componen una base de $\mathbb{R}^3$.

12.-

a) Halla los valores de m para que los vectores $u = (0,1,1)$; $V = (-2,0,1)$ y $W = (m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

$\alpha_1 (0,1,1) + \alpha_2 (-2,0,1) + \alpha_3 (m, m-1, 1) = (0,0,0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & m \\ 1 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} |A| &= m - 2m + 2 + 2 \\ &= -m + 4 \\ |A| &= 4 - m \neq 0 \\ & m \neq 4 \end{aligned}$$

Si $m \neq 4$, u; v y w son linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2,1,0)$ depende linealmente de u, v y w para el caso $m = 3$.

$a(0,1,1) + b(-2,0,1) + c(3,2,1) = (2,1,0)$

$$\left.\begin{aligned} 0a - 2b + 3c &= 2 \\ a - 0b + 2c &= 1 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned}\right\} A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ $c = 0$, $b = -1$, $a = 1 \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ El vector $(2,1,0)$ depende linealmente de u, v, w para $m = 3$.

13.- En los siguientes casos determine si el subconjunto dado de M_{2x2} es un subespacio vectorial de M_{2x2}.

a) El conjunto de matrices de la forma: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$

u y $v \in W$.

$$\alpha u + v = \alpha \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & -u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & -V_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_1 & 0 \\ 0 & -\alpha u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & -V_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha u + v = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + V_1 & 0 \\ 0 & -(\alpha u_1 + V_1) \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ $\alpha u + v \in W$

$\therefore$ W es un subespacio de M_{2x2}.

b) El conjunto de todas las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tales que $a+d = b+c$

u y $v \in U$

$$\alpha u + v = \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} + v_{11} & \alpha u_{12} + v_{12} \\ \alpha u_{21} + v_{21} & \alpha u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

Condiciones de u y v:

i) $u_{11} + u_{22} = u_{21} + u_{12}$

$\alpha u_{11} + \alpha u_{22} = \alpha u_{21} + \alpha u_{12}$

ii) $v_{11} + v_{22} = v_{21} + v_{12}$ (+)

$(\alpha u_{11} + v_{11}) + (\alpha u_{22} + v_{22}) = (\alpha u_{21} + v_{21}) + (\alpha u_{12} + v_{12})$

$U_{11} + U_{22} = U_{21} + U_{12}$

$$\alpha u + v = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \text{ tal que } U_{11} + U_{22} = U_{21} + V_{12}$$

$\therefore$ U es un subespacio vectorial de M_{2x2}.

c) El conjunto de matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tales que $a+b+c+d = 0$

Sean:

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in W \rightarrow u_{11} + u_{22} + u_{12} + u_{21} = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \in W \rightarrow v_{11} + v_{22} + v_{12} + v_{21} = 0$$

$W_{11} + W_{22} + W_{12} + W_{21} = 0$

$$\rightarrow \alpha u + v = \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} & \alpha u_{12} \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} + v_{11} & \alpha u_{12} + v_{12} \\ \alpha u_{21} + v_{21} & \alpha u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \text{ tales que: } W_{11} + W_{22} + W_{21} + W_{12} = 0$$

$\rightarrow \alpha u + v \in W$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de M_{2x2}.

14.- Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n
Si W es un subconjunto de V formado por las matrices que son:

i) Triangulares Inferiores.

$u, v \in W$.

$$\rightarrow \alpha u + v = \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha u_{n1} & \vdots & & \alpha u_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} + v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha u_{21} + v_{21} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha u_{n1} + v_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha u_{nn} + v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha u + v \in W$$

$\therefore$ Las matrices triangulares inferiores son un subconjunto vectorial de V.

ii) Escalares:

$x, y \in W$.

$$\rightarrow \alpha x + y = \alpha \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y \end{bmatrix}$$

$$\alpha x + y = \begin{bmatrix} \alpha x + y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha x + y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha x + y \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \alpha x + y \in \mathbb{W}$

$\therefore$ Las matrices escalares son subconjunto vectorial de V.

(ii) Antisimétricas:

m y $n \in \mathbb{W}$

$$\rightarrow \alpha m + n = \alpha \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ -m_{12} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_{1n} & \cdots & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & \cdots & n_{1n} \\ -n_{12} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -n_{1n} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha m_{12} & \cdots & \alpha m_{1n} \\ -\alpha m_{12} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\alpha m_{1n} & \cdots & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & \cdots & n_{1n} \\ -n_{12} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -n_{1n} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha m + n = \begin{bmatrix} 0 & \alpha m_{12} + n_{12} & \cdots & \alpha m_{1n} + n_{1n} \\ -(\alpha m_{12} + n_{12}) & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\alpha m_{1n} + n_{1n}) & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \alpha m + n \in \mathbb{W}$

$\therefore$ Las matrices antisimétricas son subconjuntos vectorial de V.

En conclusión, $\mathbb{W}$ es un subespacio vectorial de V.

15.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de P_3.

a) Todos los polinomios : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ para los que : $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

Sean c y $b \in W \rightarrow C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0$ y $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 0$

$\rightarrow \alpha C + b = \alpha (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3) + d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3$

$= \alpha C_0 + \alpha C_1 x + \alpha C_2 x^2 + \alpha C_3 x^3 + d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3$

$= (\alpha C_0 + d_0) + (\alpha C_1 + d_1) x + (\alpha C_2 + d_2) x^2 + (\alpha C_3 + d_3) x^3$

$\alpha C + b = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3$, $M_0 + M_1 + M_2 + M_3 = 0$

$\rightarrow \alpha C + b \in W$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de P_3.

b) Los polinomios $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ para los que a_0, a_1, a_2, a_3 son reales.

Sean m y $n \in W \rightarrow M_0, M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}$ y $n_0, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow \alpha m + n = \alpha (M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3) + n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3$

$= \alpha M_0 + \alpha M_1 x + \alpha M_2 x^2 + \alpha M_3 x^3 + n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3$

$\alpha m + n = (\alpha M_0 + n_0) + (\alpha M_1 + n_1) x + (\alpha M_2 + n_2) x^2 + (\alpha M_3 + n_3) x^3$

$\rightarrow \alpha m + n \in W$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de P_3.

c) Los polinomios : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ para los que a_1, a_2, a_3, a_0 son racionales

Sean p y $q \in U \rightarrow p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}$ y $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$.

$$\rightarrow \alpha p + q = \alpha(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3) + q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$$

$$= (\alpha p_0 + q_0) + (\alpha p_1 + q_1) x + (\alpha p_2 + q_2) x^2 + (\alpha p_3 + q_3) x^3.$$

$$= n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3$$

Si $\alpha = \sqrt{2} \rightarrow n_0, n_1, n_2, n_3 \notin \mathbb{Q}$

$\therefore$ U no es un subespacio vectorial de P_3

d) Todos los polinomios : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ para los que : $a_0 + a_1 = a_2 + a_3$

g y $h \in W$: $g_0 + g_1 = g_2 + g_3$; $h_0 + h_1 = h_2 + h_3$

$$\rightarrow \alpha g + h = \alpha(g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3) + h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3$$
$$= \alpha g_0 + \alpha g_1 x + \alpha g_2 x^2 + \alpha g_3 x^3 + h_0 + h_1 x + h_2 x + h_3 x^3$$

$$= (\alpha g_0 + h_0) + (\alpha g_1 + h_1) x + (\alpha g_2 + h_2) x^2 + (\alpha g_3 + h_3) x^3$$

$$\alpha g + h = K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 \; ; \quad K_0 + K_1 = K_2 + K_3$$

$$\longrightarrow \alpha g + h \in W$$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de P_3

16.- Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma: $\{(x,y,z,u) / 3x+5y = z-4u\}$

¿ es W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 3x+5y+4u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 3x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 5y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4u \\ u \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sean m y $n \in W$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = m_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + m_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} = n_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + n_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + n_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha m + n = \alpha\left[m_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + m_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right] + n_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + n_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + n_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha m_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha m_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha m_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + n_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + n_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + n_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha m_1 + n_1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha m_2 + n_2)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha m_4 + n_4)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \quad \alpha m + n \in W$

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.